

# 23 Теорема Гана-Банаха и следствия из нее

▽ (Гана-Банаха)  $\exists$   $X$  - мин. норм.,  $\tilde{X}$  - мин. п/пр-во  $X$ ,  $f(x)$  - мин. опр. функционал,  $\|f(x)\| \leq \|F\| \|x\|$ ,  $\forall x \in X$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\exists$  продолжение  $F$  на все  $X$  с сохр. нормы, т.е.  $\exists F(x)$ , задан на  $X$ , мин.,  $\|F(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ ,  $\forall x \in X$ ,  $F(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in X$

Д-ли в случае сепарабельности  $X$   $x = x' + \alpha x_0$ ,  $x' \in \tilde{X}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $F(x) = F(x') + \alpha F(x_0) = f(x') + \alpha \cdot c$ ,  $c = F(x_0)$

$F(x' + \alpha x_0) = f(x') + \alpha c$ ,  $x' \in \tilde{X}$ . Если  $\alpha > 0$ , то

должно быть:  $|F(x' + \alpha x_0)| \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$ ,  $f(x') + \alpha c \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$ ,  $f(x') + \alpha c \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$ ,  $f(x') + \alpha c \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\| \Rightarrow$

$\Rightarrow c \leq \|F\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1)$ ,  $\forall x_1 \in \tilde{X}$ .

Если же  $\alpha < 0$ ,  $f(x') + \alpha c \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$ ,  $f(-\frac{x'}{\alpha}) -$

$-c \leq \|F\| \cdot \|\frac{x'}{\alpha} - x_0\| \Rightarrow c \geq f(x_2) - \|F\| \cdot \|x_2 - x_0\| \forall x_2 \in \tilde{X}$

$\Rightarrow f(x_2) - \|F\| \cdot \|x_2 - x_0\| \leq c \leq \|F\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1) \forall x_1, x_2 \in \tilde{X}$

$f(x_2) - \|F\| \cdot \|x_2 - x_0\| \leq \|F\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1) \Rightarrow$

$f(x_1 + x_2) \leq \|F\| \cdot (\|x_1 + x_0\| + \|x_2 - x_0\|)$ , что верно, т.к.

$f(x_1 + x_2) \leq \|F\| \cdot \|x_1 + x_2\| \leq \|F\| (\|x_1 + x_0\| + \|x_2 - x_0\|) \Rightarrow \exists c$

Итак,  $|F(x' + \alpha x_0)| \leq \|F\| \cdot \|x' + \alpha x_0\| \forall \alpha, \forall x_0$ ; т.к.

$F(-x) \leq \|F\| \cdot \|-x\| = \|F\| \cdot \|x\| \Rightarrow F(x) \geq -\|F\| \cdot \|x\|$ . Пусть  $X' = \{x_1, x_2, \dots\}$

линейн. об. мин. мин. нр-во;  $M = \text{lin } X'$   $\forall x \in X \exists z_k \in M: z_k \rightarrow x$ .

$|f(z_k) - f(z_n)| = |f(z_k - z_n)| \leq \|F\| \cdot \|z_k - z_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(z_k)\}$  - ф.н.  $\Rightarrow \exists \lim f(z_k) = f(x)$  ч.т.д.  $\blacksquare$

Сл. 1  $\exists x_0 \in X, x_0 \neq 0$ . Тогда  $\exists$  мин. опр. ф-цинал  $f(x)$ , задан на  $X$ ,  $f(x_0) = \|x_0\|$ ,  $\|f\| = 1$

$\Delta \tilde{X} = \{x' = 2x_0\}$  - минимальное подпр-во  $X$  на  $\tilde{X}$  определим  
 $f(x') = 2\|x_0\|$ ,  $f(2x_0) = 2\|x_0\| \Rightarrow \|f\| = 1$ . По т. Хаана-  
 Банаха, сущ.  $F(x)$ , зад. на  $X$ , и  $F(x') = f(x')$  на  $X$ ,  
 $\|F\| = \|f\| = 1$ . Ч.Т.Д.

Сл. 2  $\exists M$  - мин. замкн. п/пр-во  $X$ ;  $x_0 \in M$ ,  $x_0 \in X$ .  
 Тогда  $\exists$  мин. сур. ф-н  $f(x)$ , задан. на  $X$ :  
 $f(x') = 0$ ,  $\forall x' \in M$ ,  $f(x_0) = 1$

$\Delta$  Определим  $\tilde{X} = \{x = x' + \alpha x_0, x' \in M, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ; положим  $f(x) =$   
 $= f(x' + 2x_0) = 2 \Rightarrow$  минимальн; проверим суживенность.

$$\sup_{\substack{x' \in M \\ \alpha \in \mathbb{R}}} \frac{|f(x' + 2x_0)|}{\|x' + 2x_0\|} = \sup \frac{|\alpha|}{\|x' + 2x_0\|} = \sup \frac{1}{\|-\frac{x'}{2} - x_0\|} =$$

$$= \frac{1}{\inf_{x' \in M} \|x' - x_0\|} > 0, \text{ т.к. } \inf_{x' \in M} \|x' - x_0\| \geq \alpha > 0, \text{ т.к. если}$$

$\inf \|x' - x_0\| = 0 \Rightarrow x_n \in M, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 \in M \Rightarrow (1?)$